ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. ; suite à l'arrêté du 9 décembre 1997.
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ajustement polynomial par la méthode des moindres carrés.

Dans tout le problème, n est un entier naturel différent de 0, $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une suite finie de n+1 nombres réels ; l'objet du problème est de déterminer, pour tout entier naturel k, les polynômes P de degré inférieur ou égal à k, tels que le réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation suivante

$$\Delta_k(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(i))^2$$

soit minimum et de préciser la valeur m_k de ce minimum.

1°) Application ϕ_k :

Pour tout entier naturel k, soit ϕ_k l'application de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ fait correspondre le vecteur (P(0), P(1),..., P(n)) de $\mathbb{R}^{n+1}$: $\phi_k(P)$ = (P(0), P(1),..., P(n)). Il est admis que cette application ϕ_k est linéaire.

a. Déterminer le noyau de l'application ϕ_k, en discutant suivant les valeurs de l'entier k par rapport à l'entier n ; préciser la dimension du noyau ; établir l'expression des polynômes du noyau lorsque celui-ci n'est pas réduit à {0}.

b. Étudier, suivant les valeurs de l'entier k, le rang de ϕ_k. Pour quelles valeurs de l'entier k est-elle surjective ? Pour quelle valeur de l'entier k est-elle un isomorphisme ?

2°) Étude préliminaire :

L'entier n est toujours donné ; soit $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une suite de n+1 réels.

a. Déduire des questions précédentes l'existence et l'unicité d'un polynôme Y appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, tel que, pour tout i compris entre 0 et n, $0 \leqslant i \leqslant n$, la relation $Y(i) = y_i$ ait lieu.

Cette notation du polynôme Y associé à la suite $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est conservée dans la suite.

b. Étant donné un entier p compris entre 0 et n, $0 \leqslant p \leqslant n$, soit ℓ_p la suite de n+1 réels tous nuls sauf celui de rang p égal à 1 ; il vient :

$\ell_0 = (1, 0, \dots, 0)$; $\ell_p = (0, \dots, 1, \dots, 0)$; $\ell_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Démontrer l'existence et l'unicité d'une base $\mathfrak{L}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\mathfrak{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$$

telle que pour tout couple d'indices i et j compris entre 0 et n, $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n$, la relation $L_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , si } i=j, \\ 0 \text{ , si } i\neq j, \end{cases}$ ait lieu.

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $\mathfrak{L}$? du polynôme Y dans la base $\mathfrak{L}$?

c. Soit k un entier supérieur ou égal à n ; déterminer la valeur du minimum m_k du réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation

$$\Delta_k(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(i))^2$$

où P est un polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$. Quels sont les polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ pour lesquels l'expression $\Delta_k(P)$ est nulle ?

Dans toute la suite l'entier k est supposé inférieur ou égal à l'entier n ; $k \leqslant n$.

3°) Interprétation de m_k pour $k \leqslant n$:

a. Structure euclidienne de $\mathbb{R}_n[X]$:

Prouver l'existence et l'unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire, noté $\langle . , . \rangle$ tel que la base $\mathfrak{L}$ définie à la question 2°.b soit orthonormale. Préciser pour deux polynômes P et Q quelconques de $\mathbb{R}_n[X]$ la valeur de $\langle P, Q \rangle$.

Le résultat : $6\sum_{p=1}^{n} p^2 = n(n+1)(2n+1)$ étant admis, calculer les produits scalaires $<1, 1>$, $<1, X>$ et $<1, X^2>$.

Dans tout ce qui suit, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de ce produit scalaire ; dans cet espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$, $<.,.>$ la norme d'un polynôme P est alors :

$$\|P\| = \sqrt{<P, P>} .$$

b. Étant donnée une suite $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, soit Y le polynôme de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ associé à cette suite (question 2°.a). Déduire des conventions précédentes la relation suivante :

$$\Delta_k(P) = \|Y - P\|^2 .$$

Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P_k appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ pour lequel le réel $\Delta_k(P)$ est égal à son minimum m_k :

$$m_k = \|Y - P_k\|^2 .$$

Définir le polynôme P_k au moyen de Y et de $\mathbb{R}_k[X]$.

Que dire du polynôme $Y-P_k$ et du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$? Faire un croquis.

c. Exemples :

i/ k=0 ; déterminer, pour un polynôme Y, image d'une suite donnée $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $(n\geqslant 1)$, les expressions de P_0 et m_0. Comparer $\|Y\|^2 - \|P_0\|^2$ et m_0.

ii/ k=1 ; l'entier n est supposé impair : $n = 2q-1$; la suite $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ définie par la relation : $y_i = \begin{cases} 1, \text{ si } 0\leq i\leq q-1, \\ -1, \text{ si } q\leq i\leq 2q-1. \end{cases}$ Déterminer le polynôme P_1.

4°) <u>Détermination de</u> m_k <u>à l'aide d'une base orthogonale de</u> $\mathbb{R}_n[X]$:

a. Le but de cette question est de construire une suite unique de polynômes B_0, $B_1,\ldots, B_n$ tels que :

i/ le polynôme B_0 soit égal à 1 ;

ii/ pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n $(k \leqslant n)$, la suite $(B_0, B_1,\ldots, B_k)$ soit une base du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ telle que les polynômes B_i, $0\leqslant i\leqslant k$, soient deux à deux orthogonaux ;

iii/ pour k supérieur ou égal à 1, le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme B_k soit égal au coefficient du binôme C_{2k}^k.

Déterminer les polynômes B_1 et B_2. La relation $<1, X^3> = (<1, X>)^2$ est admise.

Déterminer le polynôme B_k, lorsque l'entier k varie de 1 à n, à l'aide des polynômes X^k et Q_k, projection du monôme X^k sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Faire un croquis.
En déduire l'existence et l'unicité d'une base $\mathcal{B} = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant les propriétés i, ii et iii.

b. Démontrer, lorsque l'entier k est compris entre 1 et n, $1 \leqslant k \leqslant n$, que le polynôme $B_k(n - X)$ (associé à la fonction polynomiale $x \mapsto B_k(n - x)$) est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. En déduire une relation simple entre les polynômes $B_k(n - X)$ et B_k.

c. Déterminer les coordonnées du polynôme P_k, défini à la question 3°.b ($k \leqslant n$), dans la base $\mathcal{B}$. Que vaut P_n ? En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n ($1 \leqslant k \leqslant n$), les relations :

$$P_k = P_{k-1} + \frac{< B_k, Y >}{\|B_k\|^2} B_k \; ; \quad m_k = m_{k-1} - \frac{(< B_k, Y >)^2}{\|B_k\|^2} \; .$$

5°) Étude de la famille des polynômes B_k, k=0,1,....,n :

a. Soient k un entier compris entre 2 et n, $2 \leqslant k \leqslant n$ et j en entier compris entre 0 et k–2, $0 \leqslant j \leqslant k-2$; démontrer l'orthogonalité des polynômes $X.B_k$ et B_j :

$$< X.B_k \; , B_j > = 0 \; .$$

b. En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n–1, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, l'existence de réels α_k, β_k et γ_k tels que :

$$X.B_k = \alpha_k B_{k-1} + \beta_k B_k + \gamma_k B_{k+1} \; .$$

c. Déterminer, à l'aide de la question 4°.b, la valeur du réel β_k.

d. Que vaut γ_k ? En déduire la valeur du produit scalaire $<X.B_k, B_{k+1}>$ en fonction de l'entier k et du réel $\|B_{k+1}\|^2$.

e. Déterminer le réel α_k en fonction de l'entier k et des réels $\|B_{k-1}\|^2$ et $\|B_k\|^2$. Déduire des résultats précédents la relation :

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} \left\{ B_1.B_k - \frac{k}{2k-1} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1} \right\} \; .$$

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE